ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE

DES LIGNES & DES SURFACES

EN UN POINT ORDINAIRE

Représentation géométrique des dérivées

PAR

Pierre VANDEUREN

SOUS-LIEUTENANT DU GÉNIE



BRUXELLES

J. LEBÈGUE & Cie, LIBRAIRES-ÉDITEURS

46, RUE DE LA MADELEINE, 46

ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE
DES LIGNES & DES SURFACES
EN UN POINT ORDINAIRE

Représentation géométrique des dérivées

Bruxelles. — Imprimerie J. JANSSENS, 25, rue des Armuriers.

ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE

DES LIGNES & DES SURFACES

EN UN POINT ORDINAIRE

Représentation géométrique des dérivées

PAR

Pierre VANDEUREN

SOUS-LIEUTENANT DU GÉNIE



BRUXELLES

J. LEBÈGUE & Cie, LIBRAIRES-ÉDITEURS

46, RUE DE LA MADELEINE, 46

TABLE DES MATIÈRES

AVANT-PROPOS

1. La *résolution géométrique* d'un problème où interviennent les données de l'analyse infinitésimale se présente souvent de la manière suivante :

On possède quelques *instruments géométriques*, c'est-à-dire des représentations de fonctions plus ou moins compliquées de dérivées d'équations de courbes et de surfaces ; par exemple, le plan osculateur en un point d'une courbe.

Le problème se réduisant, en dernière analyse, en une série d'opérations entre les dérivées intervenant dans la question, la représentation géométrique de la solution exige alors trois séries d'opérations, que l'on peut représenter schématiquement comme suit :

1° Résolution du problème = φ_1 (dérivées) ;

2° Dérivées = φ_2 (instruments géométriques) ;

3° Résolution du problème = φ_1 [φ_2 (instruments géométriques)] = φ_3 [instruments géométriques].

La fonction finale φ_3 constitue la solution géométrique du problème ; on entrevoit immédiatement que l'on peut en compliquer singulièrement la recherche, en utilisant des fonctions φ_2 qui n'ont en général rien de commun avec les fonctions φ_1, lesquelles doivent être supposées quelconques.

2. On peut simplifier notablement les opérations, en utilisant *des instruments représentant directement les dérivées*.

La fonction φ_1 constitue alors la solution géométrique du problème, et la recherche des fonctions φ_2 et φ_3 disparaît du coup.

Mais d'autres avantages sont encore réalisés :

1° La résolution géométrique du problème marche de front

avec la résolution analytique; les deux procédés peuvent donc s'entr'aider à chaque instant;

2° La détermination des instruments géométriques ne nécessite plus aucune définition nouvelle, et la généralisation complète de ces quantités est connue pour tous les ordres de différentiation;

3° La méthode tourne les difficultés qui accompagnent la conception géométrique de la grandeur-limite.

Ces difficultés existent. Ainsi, par exemple, si l'on définit le centre de courbure comme étant la limite du point de rencontre de deux normales qui se rapprochent indéfiniment, la représentation graphique ne permet plus de *voir* lorsqu'on se rapproche de la limite; elle provoque plutôt le trouble, puisque les normales tendent à se confondre; celles-ci se confondent d'ailleurs réellement à la limite.

La recherche analytique de la limite offre heureusement des résultats clairs et tangibles qui donnent tous les apaisements; il est donc logique d'appuyer les bases de la représentation graphique sur ces recherches analytiques seulement, en écartant systématiquement des définitions des instruments fondamentaux, la conception nouvelle et inutile de la limite géométrique.

Le procédé a d'ailleurs l'avantage de ne plus aborder directement les difficultés qui forment la caractéristique du calcul différentiel : ces difficultés sont vaincues, une fois pour toutes, lors de la définition et de l'établissement de la valeur des dérivées. Enfin, la représentation graphique possède ainsi son véritable caractère, qui est celui d'une *application* du calcul des dérivées, et les opérations géométriques conservent toute leur rigueur et leur clarté (*);

4° Enfin, on verra que le procédé permet de résoudre la plupart des problèmes à l'aide de la règle et du compas, car la représentation des dérivées est réalisée à l'aide de plans, de droites et de cercles.

(*) Nous croyons que l'introduction dans les multiples applications du calcul différentiel du procédé qui est préconisé ici pour la géométrie serait du plus heureux effet; nous nous proposons de faire connaître bientôt les bases de la cinématique modifiées dans ce sens.

3. Est-il nécessaire de montrer que l'ensemble des méthodes disparates actuelles réalise très mal les divers avantages qui viennent d'être signalés?

1° Certains instruments géométriques nécessitent des recherches compliquées; par exemple, le rayon de torsion en un point d'une courbe gauche.

2° Les représentations géométriques actuelles ne sont pas générales; à peine peut-on pratiquement résoudre les questions où interviennent les dérivées du deuxième ordre.

3° Les instruments formant la base de la représentation sont des limites de grandeurs géométriques plus ou moins compliquées dépendant des courbes ou des surfaces représentées.

4° Les instruments qui sont employés avec quelque succès sont la tangente, le plan tangent, le rayon de courbure, le plan osculateur, l'indicatrice de Dupin.

On retrouvera précisément des éléments géométriques analogues en considérant directement les dérivées. On les représente donc depuis longtemps, jusqu'au deuxième ordre, d'une façon inconsciente et détournée. L'ancien procédé est d'ailleurs très inférieur, car il donne aux instruments des significations étroites et particulières, dont la généralisation est difficile lorsqu'on veut passer aux ordres supérieurs de différentiation.

5° Il n'y a pas lieu de craindre que quelques-unes des propriétés des instruments, qui leur étaient reconnues par les définitions antérieures, échappent dans le nouveau procédé de définition. Ces propriétés seront aisément retrouvées, *comme application cette fois*, principalement en se servant du développement de Taylor.

Ainsi, la tangente en un point A d'une courbe peut être obtenue par la simple considération des dérivées (**12**). En se servant du développement de Taylor, on pourra aisément prouver que cette tangente représente, avec l'approximation que l'on voudra, la droite joignant A à un point de la courbe qui lui est indéfiniment voisin (*).

(*) Nous contestons absolument la critique qui nous a été faite et qui qualifie d'*artificielle* la méthode que nous proposons.

Dans l'exemple qui vient d'être cité, il est évident qu'un grand nombre d'applications géométriques de la tangente découlent directement de la

4. L'étude qui va suivre est le développement de la représentation géométrique des dérivées, établie dans le but qui vient d'être indiqué.

---

propriété qui lui est reconnue; à ce point de vue, il aurait donc été plus logique de lui donner une définition qui serait en rapport immédiat avec cette propriété.

Mais nous croyons avoir suffisamment prouvé que l'instrument ainsi obtenu est inférieur, quant à la compréhension, et que s'il a un avantage à un point de vue particulier, il rompt la généralité d'une règle et d'une méthode qui embrassent tous les instruments congénères.

D'ailleurs, une méthode tout aussi générale — l'emploi du développement de Taylor — conduit des définitions rigoureuses des instruments à leurs propriétés géométriques.

Il semble donc que l'on ne pourrait agir avec moins d'artifices; peut-on en dire autant des procédés qui, partant de chacune de ces propriétés en particulier, torturent une expression pour arriver, après un passage à la limite quelquefois compliqué, à un instrument dont l'expression analytique est d'ailleurs quelconque?

CHAPITRE Ier

Représentation géométrique des dérivées

5. La *représentation géométrique complète* d'une dérivée comporte les quatre opérations suivantes :

1° Représenter la valeur absolue de la dérivée ;

2° Représenter les directions positives des trois axes par rapport auxquels la dérivée est établie ;

3° Représenter le signe de la dérivée ;

4° Représenter le mode de variation de ce signe avec celui des directions positives des axes de coordonnées.

VALEUR ABSOLUE DES DÉRIVÉES

6. Les surfaces et les lignes sont représentées par une ou deux fonctions de la forme

$$z = f(x, y)$$

entre les trois coordonnées d'un système d'axes orthogonaux.

La dérivée partielle générale de cette fonction

$$\frac{d^{p+q}z}{dx^p\, dy^q}$$

se présente sous la forme d'une grandeur ayant les dimensions

$$\left[\text{grandeur linéaire}\right]^{-p-q+1}.$$

On représentera la dérivée par une grandeur linéaire qui, mesurée à l'aide de la grandeur linéaire-unité, représente le nombre exprimant cette dérivée à l'aide de la $-(p+q-1)^{\text{ième}}$ puissance de la grandeur-unité.

Cette grandeur représentative est portée sur une parallèle à un des axes de coordonnées, à partir d'un point M, origine.

DIRECTION POSITIVE DES AXES

7. En faisant la convention de porter une grandeur représentée vers la direction positive de l'axe de coordonnée à partir du point M, on détermine réciproquement la direction positive de l'axe, par la représentation de la grandeur.

Les directions positives des deux autres axes seront connues en les amorçant au point M.

SIGNE DES DÉRIVÉES

8. Le signe représenté est celui correspondant aux directions positives représentées au n° **7**.

L'extrémité de la grandeur représentative sera notée p ou n, suivant que la dérivée est positive ou négative.

VARIATION DU SIGNE DES DÉRIVÉES

9. La dérivée $\frac{d^{p+q}z}{dx^p\, dy^q}$ change ou ne change pas de signe avec le changement de direction des axes des x ou des y, suivant que p ou q est impair ou pair.

La dérivée change toujours de signe avec le changement de direction de l'axe des z.

On notera l'extrémité de la grandeur représentative par la lettre x, y ou z, lorsque le signe de la dérivée change avec le changement de sens de l'axe des x, des y ou des z.

10. Il est absolument nécessaire de tenir compte à la fois de ces quatre données de la représentation géométrique des dérivées.

Ainsi, deux dérivées ne sont *égales* que si, représentées par rapport aux mêmes axes de coordonnées, elles ont même valeur absolue, même signe et même mode de variation de signe.

Lorsqu'on devra exécuter une opération quelconque avec les représentations géométriques de dérivées, il faudra d'abord établir leur valeur par rapport à des systèmes d'axes *compatibles*, puis mener les opérations *en tenant compte du signe* des grandeurs.

11. Les diverses dérivées des fonctions représentant une courbe ou une surface étant connues en un point et par rapport à des axes déterminés, on peut en conclure les valeurs des dérivées par rapport à un autre système d'axes quelconques, en *dérivant les formules de transformation d'axes de coordonnées.*

La représentation géométrique complète de toutes les dérivées comportera les deux opérations suivantes :

1° *Déterminer, pour un point donné, un système d'axes spéciaux dépendant de la courbe ; les dérivées prises par rapport à ce système d'axes seront les* ÉLÉMENTS GÉOMÉTRIQUES *de la courbe au point considéré.*

2° *Établir les formules reliant les valeurs des dérivées générales aux éléments géométriques de la courbe.*

CHAPITRE II

Éléments géométriques en un point ordinaire d'une courbe gauche

ÉLÉMENTS GÉOMÉTRIQUES DU PREMIER ORDRE. — TANGENTE

12. On passe du système d'axes $Oxyz$ au système $Ox_1y_1z_1$ par les formules de transformation :

$$\begin{aligned} x &= a_1x_1 + b_1y_1 + c_1z_1 \\ y &= a_2x_1 + b_2y_1 + c_2z_1 \\ z &= a_3x_1 + b_3y_1 + c_3z_1 \end{aligned}$$

a_1, a_2..., c_3 étant des paramètres déterminés par les positions relatives des systèmes d'axes $Oxyz$ et $Ox_1y_1z_1$.

En dérivant ces équations *le long de la courbe* et en prenant x_1 comme variable indépendante, on obtient :

$$\frac{dx}{dx_1} = a_1 + b_1\frac{dy_1}{dx_1} + c_1\frac{dz_1}{dx_1},$$

$$\frac{dy}{dx} \times \frac{dx}{dx_1} = a_2 + b_2\frac{dy_1}{dx_1} + c_2\frac{dz_1}{dx_1},$$

$$\frac{dz}{dx} \times \frac{dx}{dx_1} = a_3 + b_3\frac{dy_1}{dx_1} + c_3\frac{dz_1}{dx_1}.$$

Un système d'axes particuliers $Ox_1y_1z_1$ peut fournir, en un point A $(x_1y_1z_1)$:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dz_1}{dx_1} = 0.$$

Il suffit de prendre pour cela :

$$\frac{dx}{dx_1} = a_1 = \frac{a_2}{\frac{dy}{dx}} = \frac{a_3}{\frac{dz}{dx}}, \qquad (1)$$

ce qui *détermine la direction de l'axe* Ox_1.

Cette direction est celle de la *tangente* de la courbe en A : c'est l'*élément géométrique du premier ordre*.

Sa connaissance détermine par (1) les dérivées du premier ordre par rapport au système d'axes quelconques $Oxyz$; cette propriété est réciproque.

ÉLÉMENTS GÉOMÉTRIQUES DES ORDRES SUIVANTS

13. On considérera les axes de coordonnées suivants :

L'axe Ox suivant une parallèle à la tangente de la courbe;

Les directions positives de Oz et Oy telles qu'un observateur, placé les pieds en O et la tête suivant la direction positive de l'axe Ox, passe de la direction positive de Oz à la direction positive de Oy en faisant un angle de 90° dans le sens des aiguilles d'une montre;

Les directions positives Oz_1 et Oy_1 dans le plan zOy et dans les mêmes positions relatives que Oz et Oy, Oz_1 faisant avec Oz un angle θ, compté positivement dans le sens des aiguilles d'une montre, entre les directions positives de Oz_1 et de Oz.

Les formules de transformation sont dans ce cas :

$$\left.\begin{aligned} z &= z_1 \cos\theta + y_1 \sin\theta, \\ y &= -z_1 \sin\theta + y_1 \cos\theta. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

En dérivant par rapport à x le long de la courbe, on obtient :

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz_1}{dx}\cos\theta + \frac{dy_1}{dx}\sin\theta,$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{dz_1}{dx}\sin\theta + \frac{dy_1}{dx}\cos\theta.$$

En général :

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^nz}{dx^n} &= \frac{d^nz_1}{dx^n}\cos\theta + \frac{d^ny_1}{dx^n}\sin\theta; \\ \frac{d^ny}{dx^n} &= -\frac{d^nz_1}{dx^n}\sin\theta + \frac{d^ny_1}{dx^n}\cos\theta. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

D'où la relation :

$$\left(\frac{d^nz}{dx^n}\right)^2 + \left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)^2 = \left(\frac{d^nz_1}{dx^n}\right)^2 + \left(\frac{d^ny_1}{dx^n}\right)^2. \qquad (4)$$

DÉFINITIONS

14. On peut toujours faire :

$$\theta = \theta_n$$

de manière que $$\frac{d^ny_1}{dx^n} = 0.$$

(3) montre qu'il suffit de prendre pour cela :

$$\operatorname{tg}\theta_n = -\frac{\dfrac{d^ny}{dx^n}}{\dfrac{d^nz}{dx^n}}. \qquad (5)$$

Le plan xOz_1 ainsi déterminé s'appelle *plan du $n^{ième}$ ordre* de la courbe en A.

On peut poser ensuite :

$$N = \frac{d^n z_1}{dx^n},$$

N est l'*indice géométrique du* $n^{\text{ième}}$ *ordre* de la courbe en A.

L'axe Oz_1 est la *direction géométrique du* $n^{\text{ième}}$ *ordre;* et l'extrémité de la droite représentant N, le *point géométrique du* $n^{\text{ième}}$ *ordre* en A.

Le plan, l'indice, la direction et le point constituent les éléments géométriques du $n^{\text{ième}}$ ordre de la courbe.

Leur connaissance détermine les dérivées du $n^{\text{ième}}$ ordre par rapport à des axes orthogonaux admettant l'axe des x suivant la tangente, à l'aide de la relation (3) qui devient :

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^n z}{dx^n} &= \frac{d^n z_1}{dx^n} \cos \theta_n = \mathrm{N} \cos \theta_n, \\ \frac{d^n y}{dx^n} &= -\frac{d^n z_1}{dx^n} \sin \theta_n = -\mathrm{N} \sin \theta_n. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

(4) donne aussi :

$$\mathrm{N}^2 = \left(\frac{d^n z}{dx^n}\right)^2 + \left(\frac{d^n y}{dx^n}\right)^2.$$

CHAPITRE III

Éléments géométriques d'une surface en un de ses points ordinaires

ÉLÉMENTS GÉOMÉTRIQUES DU PREMIER ORDRE. — PLAN TANGENT. NORMALE.

15. En passant comme au n° **12**, du système $Oxyz$ au système $Ox_1y_1z_1$, on obtient en dérivant *partiellement* pour la surface les formules de transformation par rapport à x_1 et y_1

$$\left(\frac{dx}{dx_1}\right) = a_1 + c_1 \left(\frac{dz_1}{dx_1}\right),$$

$$\left(\frac{dy}{dx_1}\right) = a_2 + c_2 \left(\frac{dz_1}{dx_1}\right),$$

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dx_1}\right) + \left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dx_1}\right) = a_3 + c_3 \left(\frac{dz_1}{dx_1}\right),$$

$$\left(\frac{dx}{dy_1}\right) = b_1 + c_1 \left(\frac{dz_1}{dy_1}\right),$$

$$\left(\frac{dy}{dy_1}\right) = b_2 + c_2\left(\frac{dz_1}{dy_1}\right),$$

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dy_1}\right) + \left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dy_1}\right) = b_3 + c_3\left(\frac{dz_1}{dy_1}\right).$$

Un système d'axes particuliers $Ox_1y_1z_1$ peut donner en un point A $(x_1y_1z_1)$

$$\left(\frac{dz_1}{dx_1}\right) = 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{dz_1}{dy_1}\right) = 0.$$

Il suffit de prendre pour cela

$$a_3 = a_1\left(\frac{dz}{dx}\right) + a_2\left(\frac{dz}{dy}\right),$$

$$b_3 = b_1\left(\frac{dz}{dx}\right) + b_2\left(\frac{dz}{dy}\right),$$

ce qui correspond à cette conclusion : les axes Ox_1 et Oy_1 sont dans le plan

$$z = \left(\frac{dz}{dx}\right)x + \left(\frac{dz}{dy}\right)y. \tag{7}$$

Le plan représenté par cette équation est parallèle au *plan tangent* à la surface en A.

L'axe Az_1 normal au plan tangent s'appelle *normale* à la surface en A.

La connaissance du plan tangent détermine par (7) les dérivées partielles $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ et $\left(\frac{dz}{dy}\right)$.

ÉLÉMENTS GÉOMÉTRIQUES DES ORDRES SUIVANTS

16. On notera

$\alpha_1\ \alpha_2$ (1[er] ordre),

$\beta_1\ \beta_2\ \beta_3$ (2[e] ordre),

$\gamma_1\ \gamma_2\ \gamma_3\ \gamma_4$ (3[e] ordre),

. . . .

$\mu_1\ \mu_2 \ldots \mu_{n+1}$ (n[ième] ordre),

les dérivées partielles successives de z par rapport à x et y.

Si Oz *est parallèle à la normale à la surface* en A, ces dérivées partielles constituent les éléments géométriques de la surface *par rapport aux directions* Ox *et* Oy.

RELATIONS ENTRE LES ÉLÉMENTS GÉOMÉTRIQUES DE LA SURFACE EN UN POINT

17. On peut passer des axes Oy, Ox, aux axes Oy', Ox', comme on a fait au n° **13** pour passer de Oz et Oy à Oz_1 et Oy_1 ; Oy' et Oy font l'angle φ.

Les formules de transformation sont :

$$\left.\begin{aligned} y &= y' \cos\varphi + x' \sin\varphi, \\ x &= -y' \sin\varphi + x' \cos\varphi. \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

En dérivant partiellement pour la surface par rapport à x' et y', on obtient

$$\alpha'_1 = \alpha_1 \left(\frac{dx}{dx'}\right) + \alpha_2 \left(\frac{dy}{dx'}\right),$$

$$\alpha'_2 = \alpha_1 \left(\frac{dx}{dy'}\right) + \alpha_2 \left(\frac{dy}{dy'}\right).$$

Puis en dérivant (8)

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx'} &= \sin\varphi & \frac{dy}{dy'} &= \cos\varphi, \\ \frac{dx}{dx'} &= \cos\varphi & \frac{dx}{dy'} &= -\sin\varphi. \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Par suite :

$$\alpha'_1 = \alpha_1 \cos\varphi + \alpha_2 \sin\varphi,$$
$$\alpha'_2 = -\alpha_1 \sin\varphi + \alpha_2 \cos\varphi.$$

D'ailleurs α_1 et α_2, α'_1 et α'_2 sont nuls (**15**).

En dérivant à nouveau on obtiendra pour le 2e ordre :

$$\left.\begin{aligned} \beta'_1 &= \beta_1 \cos^2\varphi + 2\beta_2 \cos\varphi \sin\varphi + \beta_3 \sin^2\varphi, \\ \beta'_2 &= \beta_2 (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + (\beta_3 - \beta_1) \cos\varphi \sin\varphi, \\ \beta'_3 &= \beta_1 \sin^2\varphi - 2\beta_2 \sin\varphi \cos\varphi + \beta_3 \cos^2\varphi. \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

$$\left.\begin{aligned} \gamma'_1 &= \gamma_1 \cos^3\varphi + 3\gamma_2 \cos^2\varphi \sin\varphi + 3\gamma_3 \cos\varphi \sin^2\varphi + \gamma_4 \sin^3\varphi, \\ \gamma'_2 &= -\gamma_1 \cos^2\varphi \sin\varphi + \gamma_2 (\cos^3\varphi - 2\cos\varphi \sin^2\varphi) \\ &\quad - \gamma_3 (\sin^3\varphi - 2\cos^2\varphi \sin\varphi) + \gamma_4 \sin^2\varphi \cos\varphi, \\ \gamma'_3 &= \gamma_1 \sin^2\varphi \cos\varphi + \gamma_2 (\sin^3\varphi - 2\sin\varphi \cos^2\varphi) \\ &\quad + \gamma_3 (\cos^3\varphi - 2\sin^2\varphi \cos\varphi) + \gamma_4 \cos^2\varphi \sin\varphi, \\ \gamma'_4 &= -\gamma_1 \sin^3\varphi + 3\gamma_2 \sin^2\varphi \cos\varphi - 3\gamma_3 \sin\varphi \cos^2\varphi + \gamma_4 \cos^3\varphi. \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

FORMULES GÉNÉRALES POUR LE N^IÈME ORDRE

18. La première dérivée partielle se présente sous la forme :

$$\mu'_1 = [\mu \cos\varphi + \mu \sin\varphi]^n$$

le second membre étant conventionnellement développé suivant la loi du binôme.

$$\mu'_1 = \mu_1 \cos^n\varphi + n\mu_2 \cos^{n-1}\varphi \sin\varphi + \frac{n(n-1)}{1,\ 2} \mu_3 \cos^{n-2}\varphi \sin^2\varphi + \ldots \quad (12)$$

Pour obtenir les autres dérivées, on trouvera, en partant de

la loi de formation des dérivées partielles du n[ième] ordre, à l'aide des dérivées de l'ordre $(n - 1)$:

$$\mu'_1 = \frac{d(\mu-1)'_1}{dx'} = \left[\frac{d(\mu-1)_1}{dx}\cos^n\varphi + \frac{d(\mu-1)_2}{dx}\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi + \ldots\right]\frac{dx}{dx'}$$

$$\mu'_2 = \frac{d(\mu-1)'_1}{dy'} = \left[\qquad\text{idem}\qquad\right]\frac{dx}{dy'}$$

$\dfrac{dx}{dx'}$ et $\dfrac{dx}{dy'}$ étant alors remplacés en fonction de φ à l'aide de (9), on obtiendra identiquement, en dérivant fictivement μ'_1 par rapport à φ

$$\frac{d\mu'_1}{d\varphi} = n\mu'_2.$$

Puis de la même manière :

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\mu'_2}{d\varphi} &= (n-1)\,\mu'_3 - \mu'_1,\\
\frac{d\mu'_3}{d\varphi} &= (n-2)\,\mu'_4 - 2\mu'_2,\\
&\vdots\\
\frac{d\mu'_k}{d\varphi} &= (n-k+1)\,\mu'_{k+1} - (k-1)\,\mu'_{k-1},\\
&\vdots\\
\frac{d\mu'_n}{d\varphi} &= \mu'_{n+1} - (n-1)\,\mu'_{n-1},\\
\frac{d\mu'_{n+1}}{d\varphi} &= -n\mu'_n.
\end{aligned}\right\}\qquad(13)$$

L'établissement de ces valeurs se simplifie encore si on remarque que l'on passe de μ'_k à μ'_{n+2-k} en changeant

$$\varphi \text{ en } 90^\circ + \varphi,$$

soit $\qquad \cos\varphi$ en $-\sin\varphi$ et $\sin\varphi$ en $\cos\varphi$.

COURBES INDICATRICES

19. Les relations établies au n° **18** permettent de construire les divers éléments μ'_k pour un angle φ donné, lorsqu'on connaît la valeur de ces éléments pour un système d'axes Ox, Oy.

On peut porter la grandeur μ'_k sur l'axe Ox' ; en faisant varier l'angle φ, l'extrémité de cette grandeur décrit un lieu qui est appelé indicatrice de l'élément μ'_k, et dont l'équation est donnée par l'une des relations (13).

20. Pour préciser, on peut construire l'indicatrice de l'élément μ'_1.

Si l'on remplace dans (12) les éléments $\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_{n+1}$ par leurs valeurs en *tenant compte des signes*, la valeur absolue de μ'_1 sera donnée par le deuxième membre de cette relation affecté du signe plus ou du signe moins.

Pour construire l'indicatrice, il suffira de construire, suivant les conventions ordinaires, les branches de courbes *réelles*, à rayons vecteurs *positifs*, des deux équations

$$\mu'_1 = + \left\{ \mu_1 \cos^n \varphi + \ldots\ldots \right\}$$

et

$$\mu'_1 = - \left\{ \mu_1 \cos^n \varphi + \ldots\ldots \right\}$$

puis de noter (p) les points correspondant à la première équation et (n) ceux correspondant à l'autre.

On peut voir facilement que l'on respecte ainsi les conventions qui ont été posées pour la représentation des dérivées.

Il n'y aura qu'un seul point sur une direction φ : en effet, les deux équations n'offrent, en réalité, pour une valeur de φ, qu'une solution pour μ'_1; car, les deux valeurs obtenues étant égales et de signes contraires, une seule convient, la positive.

On arrivera ainsi à considérer autour de l'origine une série de branches de courbes, notées (p) et (n) et comprises dans des directions angulaires données par les racines réelles en φ de

$$\mu'_1 = 0. \qquad (15)$$

L'élément géométrique est nul pour ces directions.

Des secteurs renfermant des parties de courbes positives et négatives alterneront autour de l'origine, à moins que (15) ne renferme une racine multiple d'ordre pair en φ.

21. Si l'on change φ en $(90° + \varphi)$ dans μ'_k, on obtient μ'_{n+2-k}; on obtiendra donc μ'_{n+2-k} par l'intersection de l'axe Oy' correspondant à l'angle φ, avec l'indicatrice de μ'_k.

22. Il existe donc, en réalité, $\frac{n+1}{2}$ ou $\frac{n}{2}+1$ indicatrices pour les éléments géométriques du $n^{\text{ième}}$ ordre (21).

En fait, la connaissance de l'indicatrice de μ_1 détermine les divers éléments géométriques de la surface; elle nécessite, en effet, la connaissance des éléments correspondant à un système d'axes Ox, Oy (12), et, par suite, on peut obtenir tous les autres (n° **18**).

L'indicatrice de μ_1 est appelée *indicatrice principale*.

23. On aurait pu simplifier les équations des courbes indicatrices en représentant des quantités auxiliaires m'_k, toujours positives, données par la relation

$$(m'_k)^n \times \mu'_k = \pm 1$$

le signe du second membre dépendant de celui de μ'_k.

On arriverait ainsi, pour le 2e ordre, à l'indicatrice simplifiée

$$\pm 1 = \beta_1 x^2 + 2\beta_2 xy + \beta_3 y^2 \text{ (indicatrice de Dupin)},$$

qui a le grand avantage d'être une courbe du 2e degré.

Seulement cet artifice, introduit aux ordres suivants, nécessite la résolution d'équations d'ordre supérieur lorsqu'on veut obtenir un point de l'indicatrice correspondant à une valeur de φ. Il complique donc inutilement la représentation, au lieu de la simplifier.

CHAPITRE IV

Relations entre les éléments géométriques d'une surface et des lignes tracées sur celle-ci

ÉLÉMENTS GÉOMÉTRIQUES DU PREMIER ORDRE

23. Pour une courbe quelconque de la surface on obtient par dérivation au point A :

$$\frac{dz}{dx} = \alpha_1 + \alpha_2 \frac{dy}{dx}.$$

En tenant compte de (1) et de (7), cette relation prouve que *la tangente à la courbe se trouve dans le plan tangent à la surface.*

ÉLÉMENTS GÉOMÉTRIQUES DES ORDRES SUIVANTS

24. Le *plan tangent en* A *étant parallèle au plan* $y0x$, on obtient en ce point pour une courbe de la surface :

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dz}{dx} &= \alpha_1 + \alpha_2 \frac{dy}{dx}, \\
\frac{d^2z}{dx^2} &= \beta_1 + 2\beta_2 \frac{dy}{dx} + \beta_3 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \alpha_2 \frac{d^2y}{dx^2}, \\
\frac{d^3z}{dx^3} &= \gamma_1 + 3\gamma_2 \frac{dy}{dx} + 3\gamma_3 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \gamma_4 \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 3\left(\beta_2 + \beta_3 \frac{dy}{dx}\right) \frac{d^2y}{dx^2} \\
&\quad + \alpha_2 \frac{d^3y}{dx^3},
\end{aligned}\right\} (16)$$

etc.

Si on considère la série de courbes admettant la *tangente suivant* Ox, ces relations deviennent :

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{d^2z}{dx^2} &= \beta_1, \\
\frac{d^3z}{dx^3} &= \gamma_1 + 3\beta_2 \frac{d^2y}{dx^2}, \\
\frac{d^4z}{dx^4} &= \delta_1 + 6\gamma_2 \frac{d^2y}{dx^2} + 4\beta_2 \frac{d^3y}{dx^3} + 3\beta_3 \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2, \\
\frac{d^5z}{dx^5} &= \varepsilon_1 + 10\delta_2 \frac{d^2y}{dx^2} + 10\gamma_2 \frac{d^3y}{dx^3} + 5\beta_2 \frac{d^4y}{dx^4} + 15\gamma_3 \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 \\
&\qquad + 10\beta_3 \frac{d^2y}{dx^2} \times \frac{d^3y}{dx^3},
\end{aligned}
\right\} (17)
$$

etc.

A l'aide des relations (6) on pourrait encore remplacer les diverses dérivées en fonction des éléments N et θ_n.

25. Les relations (17) montrent que les indices des divers ordres de la section plane, normale à la surface $\left(\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^3y}{dx^3} = \ldots\ldots = 0\right)$ ne sont autres que les éléments géométriques correspondant aux rayons vecteurs menés suivant Ox, des indicatrices principales de la surface.

26. Lieu des points géométriques du $n^{\text{ième}}$ ordre des courbes de la surface ayant mêmes éléments géométriques des $(n - 1)$ premiers ordres en A.

(17) montre encore que pour toutes ces courbes on a

$$\frac{d^nz}{dx^n} = \text{constante},$$

car la valeur de cet élément y est fonction des dérivées des $(n - 1)$ premiers ordres.

On conclut alors de (6), ainsi que des conventions sur la représentation des dérivées, que le lieu du point géométrique est constitué par *deux droites, perpendiculaires au plan normal à la surface mené par la tangente commune aux courbes et symétriques par rapport au point* A.

Les points de l'une des droites sont notés (p) et les points de l'autre (n).

CHAPITRE V

Application à la définition du contact des surfaces et des courbes

a) CONTACT DE SURFACES EN UN POINT COMMUN A

27. Les surfaces sont *sécantes* au point A, lorsque les deux plans tangents aux surfaces y sont différents.

Les surfaces présentent un *contact du $n^{ième}$ ordre* au point A, lorsque les plans tangents y sont confondus ainsi que les indicatrices principales des n premiers ordres.

b) CONTACT D'UNE SURFACE ET D'UNE COURBE EN UN POINT COMMUN A

La surface et la courbe sont *sécantes* au point A, lorsque la tangente à la courbe n'est pas dans le plan tangent à la surface.

La surface et la courbe présentent un *contact du $n^{ième}$ ordre* au point A, lorsque la tangente à la courbe se trouve dans le plan tangent à la surface, et que les courbes de la surface ayant les plans des n premiers ordres de la courbe, ont aussi les indices des n premiers ordres de celle-ci.

c) CONTACT DE COURBES EN UN POINT COMMUN A

Les courbes sont *sécantes* au point A, lorsque les tangentes n'y sont pas confondues.

Les courbes présentent un *contact du $n^{ième}$ ordre* au point A, lorsque les tangentes aux courbes y sont confondues et que les éléments géométriques des n premiers ordres y sont identiques chacun à chacun.

28. D'après la relation (12), pour qu'un contact du $n^{ième}$ ordre soit réalisé entre deux surfaces, il suffit que les éléments géométriques des surfaces soient confondus pour *un seul système d'axes* zOyx.

On peut même aller plus loin et démontrer que ce même contact existe lorsque les dérivées partielles jusqu'au $n^{ième}$ ordre sont égales chacune à chacune pour *un système d'axes* z'Ox'y' *absolument quelconques.*

Les formules de transformation sont :

$$z' = a_1x + b_1y + c_1z,$$
$$y' = a_2x + b_2y + c_2z,$$
$$x' = a_3x + b_3y + c_3z.$$

En dérivant partiellement pour chacune des surfaces par rapport à x', on trouve :

$$\left.\begin{aligned} \alpha'_1 &= (a_1 + c_1\alpha_1)\frac{dx}{dx'} + (b_1 + c_1\alpha_2)\frac{dy}{dx'}, \\ 0 &= (a_2 + c_2\alpha_1)\frac{dx}{dx'} + (b_2 + c_2\alpha_2)\frac{dy}{dx'}, \\ 1 &= (a_3 + c_3\alpha_1)\frac{dx}{dx'} + (b_3 + c_3\alpha_2)\frac{dy}{dx'}. \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Les surfaces ayant un contact du premier ordre, les éléments α_1 et α_2 sont égaux dans les deux surfaces.

(18) montre qu'il en est alors de même de α'_1, $\frac{dx}{dx'}$ et $\frac{dy}{dx'}$.

En dérivant par rapport à y', on conclurait de même à l'identité de la dérivée α'_2 ; les résultats sont d'ailleurs réciproques, car on peut interchanger les indices $'$ (*prime*) entre les lettres analogues des équations.

En dérivant à nouveau les équations (18) on trouve :

$$\beta'_1 = (a_1 + c_1\alpha_1)\frac{d^2x}{dx'^2} + (b_1 + c_1\alpha_2)\frac{d^2y}{dx'^2} + c_1\beta_1\frac{dx}{dx'} + c_1\beta_2\frac{dy}{dx'},$$

$$0 = (a_2 + c_2\alpha_1)\frac{d^2x}{dx'^2} + (b_2 + c_2\alpha_2)\frac{d^2y}{dx'^2} + c_2\beta_1\frac{dx}{dx'} + c_2\beta_2\frac{dy}{dy'},$$

$$0 = (a_3 + c_3\alpha_1)\frac{d^2x}{dx'^2} + (b_3 + c_3\alpha_2)\frac{d^2y}{dx'^2} + c_3\beta_1\frac{dx}{dx'} + c_3\beta_2\frac{dy}{dy'}.$$

Si en plus de α_1 et α_2, β_1 et β_2 sont égaux chacun à chacun dans les deux équations, il en sera de même de

$$\beta'_1\ \frac{d^2x}{dx'^2} \quad \text{et} \quad \frac{d^2y}{dx'^2}.$$

Cette démonstration pourrait se continuer ainsi jusqu'au n^{ième} ordre.

CHAPITRE VI

Relations entre les éléments géométriques d'une courbe commune à deux surfaces et les éléments géométriques de celles-ci

CAS DE DEUX SURFACES SÉCANTES AU POINT COMMUN A

29. *1er ordre.* — La tangente se trouve à l'intersection des deux plans tangents (n° **23**).

Ordres suivants. — La courbe appartenant aux deux surfaces,

le point du $n^{ième}$ ordre, se trouve à l'intersection des deux lieux linéaires des points du $n^{ième}$ ordre des courbes des surfaces ayant mêmes éléments des $(n - 1)$ premiers ordres (n° **26**).

CAS DE DEUX SURFACES AYANT UN CONTACT DU PREMIER ORDRE

30. *1er ordre.* — Les plans tangents des surfaces sont confondus ; la tangente à la courbe d'intersection n'est donc pas déterminée par la connaissance des éléments géométriques du premier ordre communs aux deux surfaces. Il faut recourir au 2e ordre.

Soit Ox' la direction inconnue de la tangente cherchée.

Les lieux linéaires des points du 2e ordre correspondant dans les deux surfaces à cette direction de tangente doivent être confondus, puisqu'ils sont parallèles (n° **26**) et qu'ils doivent présenter un point commun pour l'indice de la courbe commune. Les sections normales menées suivant Ox' ont donc même indice du 2e ordre ; d'après le n° **25**, il en est alors de même des éléments β'_1 des deux surfaces, ce qui conduit, d'après le développement (12), à la relation

$$(s_1\beta_1 - s_2\beta_1)\cos^2\varphi + 2(s_1\beta_2 - s_2\beta_2)\cos\varphi\sin\varphi + (s_1\beta_3 - s_2\beta_3)\sin^2\varphi = 0. \quad (19)$$

Deux valeurs de φ correspondent à Ox' ; il y a donc au point A deux courbes communes aux deux surfaces, dont on vient de déterminer les tangentes.

On peut remarquer que ces tangentes correspondent aux rayons vecteurs communs des indicatrices principales du 2e ordre (n° **22**).

31. *Ordres suivants.* — En mettant Ox suivant une des tangentes à la courbe, et en raisonnant comme au n° **30** pour la comparaison des lieux linéaires des points du 3e ordre des courbes des surfaces ayant un contact du 2e ordre (n° **27**) avec la courbe commune (n° **26** et relation [17]), on trouve

$$(s_1\gamma_1 - s_2\gamma_1) + 3(s_1\beta_2 - s_2\beta_2)\frac{d^2y}{dx^2} = 0. \qquad (20)$$

D'où la détermination de $\frac{d^2y}{dx^2}$, et, par suite, celle des éléments géométriques du 2e ordre de la courbe (6) (17).

32. Dans le cas où (19) aurait eu des racines égales en φ, on aurait obtenu (n° **31**) :

$$s_1\beta_1 = s_2\beta_1$$

et

$$s_1\beta_2 = s_2\beta_2$$

et (20) aurait alors exigé :

$$s_1\gamma_1 = s_2\gamma_1.$$

En recourant alors au 4ᵉ ordre, on aurait trouvé comme précédemment :

$$(s_1\delta_1 - s_2\delta_1) + 6\,(s_1\gamma_2 - s_2\gamma_2)\frac{d^2y}{dx^2} + 3\,(s_1\beta_3 - s_2\beta_3)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = 0$$

qui détermine deux valeurs pour $\frac{d^2y}{dx^2}$ correspondant aux deux courbes de contact, lesquelles ont ici elles-mêmes un contact du premier ordre.

CAS DE DEUX SURFACES AYANT UN CONTACT DU $k^{\text{IÈME}}$ ORDRE

33. La marche générale des opérations est tout indiquée par le cas précédent :

Si les surfaces ont un contact du $k^{\text{ième}}$ ordre, les tangentes aux courbes communes seront données par une équation analogue à (19), écrite à l'aide de (12), entre les éléments géométriques du $(k+1)^{\text{ième}}$ ordre.

Les $(k+1)$ racines de cette équation en φ correspondront aux points de rencontre des indicatrices principales du $(k+1)^{\text{ième}}$ ordre dans les deux surfaces.

Les éléments du 2ᵉ ordre des courbes seront obtenus en égalant les valeurs de $\frac{d^{k+2}z}{dx^{k+2}}$ pour les deux surfaces dans les relations (17). On verra que les termes renfermant une dérivée supérieure à $\frac{d^2y}{dx^2}$ sont multipliés par un élément géométrique de surface inférieur à l'ordre $k+1$, donc le même pour les deux surfaces; ces termes disparaissent donc. Il restera une équation déterminant $\frac{d^2y}{dx^2}$.

On devra recourir à des éléments de surface de l'ordre $(n+k)$ pour déterminer les éléments géométriques de l'ordre n des courbes.

CHAPITRE VII

Relations entre les éléments géométriques et les dérivées générales en un point d'une courbe

34. Voici la marche des opérations :

Étant donnés le système d'axes quelconques $zOxy$ et les dérivées de z par rapport à x et y, on déterminera les éléments géométriques des projections de la courbe sur les plans de coordonnées zOx et zOy, puis on déterminera à l'aide de ceux-ci les éléments de la courbe elle-même.

La première partie du problème revient donc à exprimer les relations reliant les dérivées générales d'une courbe plane (projection de la courbe), prises par rapport à des axes quelconques du plan, aux éléments géométriques de la courbe.

La seconde partie consistera à déterminer les éléments de la courbe d'intersection des deux cylindres droits ayant les projections comme sections droites.

PREMIÈRE PARTIE

35. Soient une courbe plane rapportée aux axes zOy de son plan, puis des axes $z'Oy'$ reliés à zOy comme il est dit au n° **13**, et tels que Oy' *soit confondu avec la tangente* à la courbe.

Les formules de transformation sont :

$$z = z' \cos\theta + y' \sin\theta,$$
$$y = - z' \sin\theta + y' \cos\theta.$$

On obtient par dérivation le long de la courbe, par rapport à y'

$$\frac{dz}{dy} \times \frac{dy}{dy'} = \frac{dz'}{dy'} \cos\theta + \sin\theta,$$
$$\frac{dy}{dy'} = - \frac{dz'}{dy'} \sin\theta + \cos\theta.$$

Mais $\frac{dz'}{dy'} = 0$ (n° **12**),

d'où
$$\frac{dz}{dy} = \operatorname{tg}\theta$$

et
$$\frac{dy}{dy'} = \cos\theta.$$

La *dérivée* $\frac{dz}{dy}$ *n'est autre que la tangente de l'angle fait par la*

tangente à la courbe avec l'axe Oy, cet angle étant compté dans le sens indiqué au nº **13.**

En dérivant à nouveau, on obtient pour le *2e ordre*

$$\frac{d^2z}{dy^2}\cos^3\theta = \frac{d^2z'}{dy'^2}\ (*),$$

puis pour le *3e ordre :*

$$\frac{d^3z}{dy^3}\cos^4\theta = 3\left(\frac{d^2z'}{dy'^2}\right)^2 \operatorname{tg}\theta + \frac{d^3z'}{dy'^3},$$

ou bien :

$$\frac{d^3z}{dy^3}\cos^4\theta - 3\frac{d^2z}{dy^2}\cos^5\theta\sin\theta = \frac{d^3z'}{dy'^3},$$

pour le *4e ordre :*

$$\frac{d^4z}{dy^4}\cos^5\theta = 10\frac{d^3z'}{dy'^3}\times\frac{d^2z'}{dy'^2}\operatorname{tg}\theta + 15\left(\frac{d^2z'}{dy'^2}\right)^3\operatorname{tg}^2\theta + \frac{d^4z'}{dy'^4},$$

ou bien :

$$\frac{d^4z}{dy^4}\cos^5\theta - 10\frac{d^3z}{dy^3}\times\frac{d^2z}{dy^2}\cos^6\theta\sin\theta + 15\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)^3\cos^7\theta\sin^2\theta = \frac{d^4z'}{dy'^4}.$$

Et l'on pourrait pousser plus loin jusqu'au $n^{\text{ième}}$ ordre.

DEUXIÈME PARTIE

36. D'après le chapitre VI, le problème est actuellement résolu, si l'on connaît les éléments géométriques des cylindres projetants.

Or, ceux-ci sont connus; si on prend un système d'axes tels que Ox soit parallèle à la tangente à la section droite et Oy parallèle à la génératrice du cylindre, d'après le nº **25,** les indices successifs de la section droite constituent les éléments $\beta_1, \gamma_1, \ldots \mu_1$ de la surface, et tous les autres éléments sont nuls, car l'équation de la surface peut s'écrire :

$$z = f(x)$$

et les dérivées partielles prises par rapport à y sont nulles.

(*) Ce qui revient à la forme connue du rayon de courbure

$$\frac{1}{\frac{d^2z'}{dy'^2}} = \frac{\left[1+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2z}{dy^2}}.$$

CHAPITRE VIII

Relations entre les éléments géométriques et les dérivées partielles générales en un point d'une surface

37. On peut d'abord passer du système d'axes quelconque $zOxy$ au système d'axes $zOx'y'$, Oy' et Ox' étant reliés à Oy et Ox comme au n° **17**, Ox' *étant à l'intersection du plan tangent à la* surface *avec* yOx.

En recherchant alors les dérivées partielles, on retombe sur la dérivation dans le changement d'axes du n° **17**, sauf en ce que les dérivées α du premier ordre ne sont pas nulles.

Les dérivées partielles par rapport à $zOx'y'$ peuvent donc se construire à l'aide des dérivées prises par rapport à $zOxy$.

En effet, Ox' se trouvant dans le plan tangent on a, d'après le n° **15**,

$$\alpha'_1 = 0,$$

ou bien : $$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \text{ (voir n° 17).}$$

(10), (11)... permettent alors de construire avec la règle et le compas les éléments α'_2 β' γ'...

38. On peut maintenant passer de $x'Ozy'$ à $x'Oz''y''$, Oz'' et Oy'' étant reliés à Oz et Oy', comme au n° **13**, Oz_1 et Oy_1 le sont à Oz et Oy, et Oy'' *étant dans le plan tangent à la surface* qui est donc parallèle à $x'Oy''$.

Les formules de transformation sont donc :

$$z = z'' \cos\theta + y'' \sin\theta,$$
$$y' = -z'' \sin\theta + y'' \cos\theta.$$

Elles donnent par dérivation partielle par rapport à x' et y'' :

Pour le *1er ordre* :

$$\alpha''_1 = 0, \qquad \alpha''_2 = 0, \qquad \alpha'_2 = \operatorname{tg}\theta,$$

puisque $x'Oy''$ est parallèle au plan tangent.

Pour les *ordres suivants* :

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta\, \beta'_1 &= \beta''_1 \\ \cos^2\theta\, \beta'_2 &= \beta''_2 \\ \cos^3\theta\, \beta'_3 &= \beta''_3 \end{aligned}\right\} \text{2}^e \text{ ordre ;}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta\, \gamma'_1 &= \gamma''_1 + 3\beta''_1 \beta''_2 \operatorname{tg}\theta \\ \cos^2\theta\, \gamma'_2 &= \gamma''_2 + (2\beta''^2_2 + \beta''_1 \beta''_3) \operatorname{tg}\theta \\ \cos^3\theta\, \gamma'_3 &= \gamma''_3 + 3\beta''_2 \beta''_3 \operatorname{tg}\theta \\ \cos^4\theta\, \gamma'_4 &= \gamma''_4 + 3\beta''^2_3 \operatorname{tg}\theta \end{aligned}\right\} \text{3}^e \text{ ordre}$$

ou bien :

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta\,\gamma'_1 - 3\cos^2\theta\sin\theta\,\beta'_1\,\beta'_2 = \gamma''_1 \\ \cos^2\theta\,\gamma'_2 - (2\beta'^2_2 + \beta'_1\,\beta'_3)\cos^3\theta\sin\theta = \gamma''_2 \\ \cos^3\theta\,\gamma'_3 - 3\cos^4\theta\sin\theta\,\beta'_2\,\beta'_3 = \gamma''_3 \\ \cos^4\theta\,\gamma'_4 - 3\cos^5\theta\sin\theta\,\beta'^2_3 = \gamma''_4\end{array}\right\}\ 3^e\text{ ordre.}$$

CHAPITRE IX

Détermination pratique des éléments géométriques de surfaces dans certains cas particuliers et examen de quelques catégories de surfaces connues

39. Si l'on possède l'*équation de la surface*, on peut donc déterminer les diverses dérivées partielles, puis trouver les éléments géométriques en un point, en se servant des relations trouvées au chapitre VIII.

Mais il arrive très souvent, particulièrement en *géométrie descriptive*, qu'une surface est déterminée par son *mode de génération*, et que la recherche de l'équation de la surface, à l'aide de ces éléments déterminants, offrirait des difficultés.

On pourra quelquefois simplifier les opérations en utilisant le procédé suivant :

1° *Déterminer les éléments géométriques des directrices et des génératrices passant par le point*, en se servant au besoin des données du chapitre VII pour arriver à ce résultat;

2° *En tirer des relations entre les éléments géométriques de la surface* à l'aide des résultats du chapitre IV, transformés au besoin par les relations du n° **18**.

On peut remarquer que toutes les relations ainsi utilisées sont linéaires par rapport aux inconnues.

40. Il existe aussi des catégories de surfaces dont on connaît les *équations aux dérivées partielles*, et qui fournissent ainsi directement une série de relations entre les éléments géométriques en un point.

Les diverses équations de surfaces dont il va être fait usage sont tirées du *Cours de calcul infinitésimal* de J. Houël (t. III, p. 156) :

1° *Surfaces cylindriques* (voir n° **36**).

Axes : Oz, parallèle à la normale au point A;

Ox, parallèle à la génératrice du point A.

Équation : $z = f(y)$.

Relations : Tous les éléments géométriques nuls sauf μ_{n+1}.

2° *Surfaces coniques.*

Axes : L'origine des axes au sommet du cône;

Oz, parallèle à la normale en A;

Ox, suivant la génératrice de A;

d, distance AO.

Equation : $z = \alpha_1 x + \alpha_2 y$.

Relations en A : $y = 0; \quad z = 0;$

$$\alpha_1 = 0; \quad \alpha_2 = 0;$$

$$\beta_1 = 0; \quad \beta_2 = 0;$$

$$\gamma_1 = 0; \quad \gamma_2 = 0; \quad \beta_3 + \gamma_3 \,.\, d = 0;$$

$$\delta_1 = 0; \quad \delta_2 = 0; \quad 2\gamma_3 + \delta_3 \,.\, d = 0; \quad 2\gamma_4 + \delta_4 \,.\, d = 0.$$

En général :

$$\mu_1 = 0; \quad \mu_2 = 0; \quad (n-2)(\mu-1)_3 + \mu_3 \times d = 0; \ldots.$$
$$\ldots..(n-2)(\mu-1)_n + \mu_n \times d = 0.$$

3° *Surfaces conoïdes.*

Axes : Droite directrice passant par l'origine;

Oz, parallèle à la normale en A;

Ox, suivant le génératrice de A;

d, distance AO.

Equations : De la directrice :

$$x = Az; \quad y = Bz.$$

Du plan directeur :

$$my + nz = 0.$$

De la surface conoïde :

$$\alpha_1 \left[m(Ay - Bx) + n(x - Az)\right] + \alpha_2 n(y - Bz) = m(y - Bz).$$

Relations : $y = 0; \quad z = 0;$

$$\alpha_1 = 0; \quad \alpha_2 = 0;$$

$$\beta_1 = 0; \quad \beta_2(-mB + n)\,d = m;$$

$$\gamma_1 = 0; \quad \gamma_2 = 0; \quad 2\beta_2 mA + \beta_3(mB + 2n) + \gamma_3(-mB + n)d = 0.$$

4° *Surfaces de révolution.*

Axes : Origine au point de rencontre de la tangente à la méridienne en A et de l'axe de révolution :

Oz, parallèle à la normale en A;

Oy, suivant la tangente à la méridienne en A;

d, distance OA.

Equations : De l'axe de révolution :

$$x = 0; \quad y = Bz;$$

De la surface :

$$\alpha_1 (y - Bz) - \alpha_2 x = Bx.$$

Relations :

$$x = 0; \quad z = 0;$$
$$\alpha_1 = 0; \quad \alpha_2 = 0;$$
$$\beta_1 \times d = B; \quad \beta_2 = 0;$$
$$\gamma_1 = 0; \quad \gamma_2 \times d = \beta_3 - \beta_1; \quad \gamma_3 = 0.$$

5° *Surfaces réglées à plan directeur.*
Axes : Oz, parallèle à la normale en A;
Ox, suivant la génératrice.
Equations : Du plan directeur :

$$By + Cz = 0;$$

De la surface :

$$(B + C\alpha_2)^2 \beta_1 - 2C(B + C\alpha_2)\alpha_1\beta_2 + C^2\alpha^2_1\beta_3 = 0.$$

Relations :

$$y = 0; \quad z = 0;$$
$$\alpha_1 = 0; \quad \alpha_2 = 0;$$
$$\beta_1 = 0.$$
$$\gamma_1 = 0; \quad B\gamma_2 = 2C\beta^2_2.$$

6° *Surfaces réglées à droite directrice.*
Axes : Directrice passant par l'origine;
Oz, parallèle à la normale en A;
Ox, suivant la génératrice en A;
d, distance OA.
Equations : De la directrice :

$$x = Az; \quad y = Bz.$$

De la surface :

$$Q^2\beta_1 - 2PQ\beta_2 + P^2\beta_3 = 0;$$
$$P = (Ay - Bx)\alpha_1 - (y - Bz);$$
$$Q = (Ay - Bx)\alpha_2 + (x - Az).$$

Relations :

$$y = 0; \quad z = 0;$$
$$\alpha_1 = 0; \quad \alpha_2 = 0;$$
$$\beta_1 = 0;$$
$$\gamma_1 = 0; \quad \gamma_2 d + 2B\beta^2_2 d + 2\beta_2 = 0.$$

7° *Surfaces développables.*
Axes : Oz, parallèle à la normale à la surface;
Ox, suivant la génératrice.

Equation : $\beta_1\beta_3 = \beta^2_2.$

Relations :

$$\alpha_1 = 0; \quad \alpha_2 = 0;$$
$$\beta_1 = 0; \quad \beta_2 = 0;$$
$$\gamma_1 = 0; \quad \gamma_2 = 0;$$
$$\delta_1 = 0; \quad \delta_2 = 0; \quad 2\gamma^2_3 = \beta_3\delta_3.$$

8° *Surfaces réglées.*

Axes : Oz, parallèle à la normale ou à la surface en A ; Ox, suivant la génératrice.

Equations :

$$\begin{vmatrix} \beta_1 & 2\beta_2 & \beta_3 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 & 2\beta_2 & \beta_3 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_1 & 2\beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & 3\gamma_2 & 3\gamma_3 & \gamma_4 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & 3\gamma_2 & 3\gamma_3 & \gamma_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Relations :

$$\alpha_1 = 0; \quad \beta_1 = 0; \quad \gamma_1 = 0; \ldots \quad \mu_1 = 0.$$

$$\begin{vmatrix} \gamma_2 & 2\beta_2 & \beta_3 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 & 2\beta_2 & \beta_3 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_1 & 2\beta_2 & \beta_3 \\ \delta_2 & 3\gamma_2 & 3\gamma_3 & \gamma_4 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & 3\gamma_2 & 3\gamma_3 & \gamma_4 \end{vmatrix} = 0.$$

CHAPITRE X

Des surfaces de raccordement le long de la génératrice d'une surface réglée

41. Il a été indiqué au n° **39** un moyen très pratique et qui peut être utilisé très souvent en géométrie descriptive, de construire les éléments géométriques d'une surface déterminée par son mode de génération.

En général, ce moyen ne réussit complètement qu'aux points d'appui de la ligne génératrice sur les éléments directeurs ; il offre des lacunes en un point quelconque de la génératrice, où les relations obtenues sont insuffisantes.

On a alors imaginé de construire, le long de la génératrice, des surfaces plus simples, offrant un contact d'un ordre déter-

miné avec la surface étudiée, et dont il est possible, par des constructions simples, d'obtenir les éléments géométriques; ceux-ci conviennent donc aussi, jusqu'à un certain ordre, à la surface primitivement envisagée.

On traitera dans ce chapitre le cas d'une surface réglée, dont on veut construire les éléments géométriques des premier et deuxième ordres.

42. A cet effet, voici d'abord la démonstration d'un premier théorème, d'ailleurs bien connu.

Deux surfaces réglées qui ont une génératrice commune ont un contact du premier ordre le long de cette génératrice, lorsqu'elles ont même plan tangent en trois points de celle-ci.

La génératrice étant confondue avec l'axe Ox, soient

$$z = ax + b \qquad z = a_1x + b_1$$
$$y = cx + d \qquad y = c_1x + d_1$$

les équations des deux surfaces.

$abcd$ sont des fonctions d'un paramètre t.

$a_1b_1c_1d_1$ sont des fonctions d'un paramètre t_1.

En calculant les dérivées α, on trouve :

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 - a &= (a'x + b')\frac{dt}{dx} & \alpha_2 &= (a'x + b')\frac{dt}{dy} \\ -c &= (c'x + d')\frac{dt}{dx} & 1 &= (c'x + d')\frac{dt}{dy} \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

D'où, pour la génératrice commune : $(a = b = c = d = 0)$

$$\alpha_1 = 0 \qquad \alpha_2 = \frac{a'x + b'}{c'x + d'}. \qquad (22)$$

Pour que les deux surfaces aient un contact du premier ordre, il suffit, d'après le n° **28**, que les éléments α soient partout confondus, ce qui conduit à la condition

$$\frac{a'x + b'}{c'x + d'} = \frac{a'_1x + b'_1}{c'_1x + d'_1}.$$

Si cette dernière relation doit être satisfaite pour trois valeurs distinctes de x, elle doit nécessairement se résoudre en identités indépendantes de x. C. Q. F. D.

Ces identités sont :

$$\frac{a'}{a'_1} = \frac{b'}{b'_1} = \frac{c'}{c'_1} = \frac{d'}{d'_1}. \qquad (23)$$

43. De la même manière, on peut démontrer que :

Deux surfaces réglées qui ont une génératrice commune ont un

contact du deuxième ordre le long de cette génératrice, lorsqu'elles ont contact du deuxième ordre en trois points de celle-ci.

De l'égalité des éléments α on trouve, par dérivation le long de la génératrice $\left(\frac{dy}{dx} = 0\right)$, qu'il en est de même des éléments β_1 et β_2. Il suffit donc de démontrer l'identité des éléments β_3 pour prouver l'existence du contact du deuxième ordre (nº **28**).

En dérivant (22) en y, on obtient :

$$\beta_3 (c'x + d') + \alpha_2 (c''x + d'') \frac{dt}{dy} = (a''x + b'') \frac{dt}{dy}$$

et en remplaçant $\frac{dt}{dy}$ par sa valeur tirée de la quatrième équation (21) :

$$\beta_3 (c'x + d')^2 = (a''x + b'') - \alpha_2 (c''x + d''),$$

puis en se servant de (22) :

$$\beta_3 (c'x + d')^3 = (a''x + b'')(c'x + d') - (c''x + d'')(a'x + b').$$

Nous obtenons ainsi l'équation de condition entre les deux surfaces :

$$\left(\frac{c'x + d'}{c'_1 x + d'_1}\right)^3 = \frac{(a''x + b'')(c'x + d') - (c''x + d'')(a'x + b')}{(a''_1 x + b''_1)(c'_1 x + d'_1) - (c''_1 x + d''_1)(a'_1 x + b'_1)}.$$

D'après (23), le premier membre de cette égalité se réduit à une constante; la condition devient donc une équation du deuxième degré en x, qui doit se réduire en identités si elle est satisfaite pour plus de deux valeurs de x.

44. Il existe une surface réglée simple, dont on peut construire aisément les éléments géométriques des deux premiers ordres en un point quelconque; c'est l'*hyperboloïde du deuxième degré.*

Il y a lieu de voir jusqu'à quel point il est possible d'identifier les éléments géométriques de l'hyperboloïde avec ceux d'une surface réglée quelconque.

PREMIER ORDRE

45. D'après le nº **42**, si l'on prend trois droites directrices, situées dans les plans tangents, et s'appuyant aux trois points de contact sur la génératrice de la surface, on constitue les éléments déterminants d'un hyperboloïde ayant contact du premier ordre avec la surface réglée.

Voici le développement analytique de ce résultat :

La génératrice étant placée suivant Ox, l'équation générale

des surfaces du deuxième ordre contenant cette génératrice est :

$$ay^2 + 2byz + cz^2 + 2dxy + 2xz + 2hy + 2kz = 0. \quad (25)$$

Elle fournit par dérivation :

$$\left.\begin{aligned} by\alpha_1 + cz\alpha_1 + dy + z + x\alpha_1 + k\alpha_1 = 0, \\ ay + by\alpha_2 + bz + cz\alpha_2 + dx + x\alpha_2 + h + k\alpha_2 = 0, \end{aligned}\right\} \quad (26)$$

qui se réduisent en un point de la génératrice à :

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 = 0, \\ dx + \alpha_2 x + h + k\alpha_2 = 0. \end{aligned}\right\} \quad (27)$$

La surface (25) sera de raccordement, si la valeur de α_2 est celle de la surface en trois points (**28** et **42**).

D'où, trois équations de condition en (27) qui déterminent d, h et k.

Les surfaces de raccordement du premier ordre sont donc exprimées par (25) où a, b, c sont arbitraires et d, h, k déterminés.

Si la *normale était confondue avec* Oz *à l'origine*, on aurait dans (27) :

$$h = 0 \quad (\alpha_2 = 0, \quad x = 0).$$

— k est l'abcisse du point où la normale est confondue en direction avec Oy $\quad (\alpha_2 = \infty, \quad x + k = 0)$.

Enfin — d est la tangente de l'angle fait par le plan tangent à l'origine avec le plan asymptote de la génératrice.

$$(x = \infty, \quad d + \alpha_2 = 0, \text{ voir n}^o\ \mathbf{38}).$$

On voit donc qu'il est aisé de construire les éléments d, h et k pour une position quelconque de l'origine sur la génératrice, Oz étant pris suivant la normale à la surface en ce point.

DEUXIÈME ORDRE

46. En dérivant à nouveau (26), on obtiendra le point de la génératrice :

$$\left.\begin{aligned} \beta_1 = 0 \\ d + \alpha_2 + \beta_2 (x + k) = 0 \\ a + 2b\alpha_2 + c\alpha_2^2 + \beta_3 (x + k) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (28)$$

La surface réglée ayant un contact de premier ordre avec l'hyperboloïde envisagé, on démontrera, par dérivation des éléments identiques α le long de la génératrice, que les éléments β_1 et β_2 sont également identiques.

On dispose alors dans (28) des trois paramètres a, b, c pour écrire que l'hyperboloïde a l'élément β_3 de la surface, en trois points.

Mais alors le contact du deuxième ordre est réalisé, d'après le n° **43**.

Il n'existe donc qu'*un seul hyperboloïde* ayant un raccordement du deuxième ordre le long de la génératrice de la surface réglée.

Il n'y a donc plus lieu de chercher à réaliser un contact plus parfait à l'aide de l'hyperboloïde du deuxième degré.

47. Toutefois, on peut remarquer que l'identité des éléments β_1, β_2 et β_3 dans les deux surfaces, le long de la génératrice, provoque des relations entre des éléments géométriques d'ordres supérieurs.

Par dérivation, on conclut, en effet, à l'identité de

$$\mu_1, \mu_2 \text{ et } \mu_3$$

le long de la génératrice $\left(\frac{dy}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = \ldots = 0\right)$.

48. La seconde génératrice de l'hyperboloïde est nécessairement menée suivant la direction unique pour les deux surfaces, qui annule l'élément général β'_1.

Il suffit de construire cette seconde génératrice pour trois points, pour déterminer géométriquement l'hyperboloïde de raccordement.

Si, à l'origine, la normale est confondue avec Oz, on y a, d'après (28) :

$$\left.\begin{aligned} \beta_1 &= 0 \\ \beta_2 &= -\frac{d}{k} \\ \beta_3 &= -\frac{a}{k} \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

Si φ est alors l'angle de la seconde génératrice avec Ox, on a, d'après (10) et (15) :

$$\left.\begin{aligned} 0 &= 2\beta_2 \cos\varphi \sin\varphi + \beta_3 \sin^2\varphi \\ \text{ou} \qquad \operatorname{tg}\varphi &= -\frac{2\beta_2}{\beta_3} = -\frac{2d}{a} \end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

49. En dérivant à nouveau les équations qui ont donné lieu aux relations (28), on aurait pu obtenir au troisième ordre, pour la génératrice :

$$\left.\begin{aligned} &\gamma_1 = 0 \\ &2\beta_2 + \gamma_2 (x + k) = 0 \\ &2b\beta_2 + 2c\alpha_2\beta_2 + \beta_3 + \gamma_3 (x + k) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (31)$$

et au quatrième ordre :

$$\left.\begin{array}{l} \delta_1 = 0 \\ 3\gamma_2 + \delta_2 (x + k) = 0 \\ 2b\gamma_2 + 2c\beta_2^2 + \gamma_3 + \delta_3 (x + k) = 0 \end{array}\right\} \quad (32)$$

Dans ces diverses relations, les éléments β_1, β_2, β_3, γ_1, γ_2, γ_3, δ_1, δ_2, δ_3 sont communs aux deux surfaces (n° **47**).

50. S'il s'agissait maintenant de construire un hyperboloïde de raccordement, connaissant les éléments géométriques de la surface en un ou plusieurs points de la génératrice (points sur les directrices), on pourrait poser les conclusions suivantes :

1° *Hyperboloïde de raccordement du premier ordre.*

Il faut déterminer d, h et k (n° **45**) ; on y arrive par la connaissance :

a) Du plan tangent en trois points dictincts, par (27) ;

b) Du plan tangent en deux points et de l'élément β_2 en un de ceux-ci : par (27) et (28) ;

c) Du plan tangent, de l'élément β_2 et de l'élément γ_2 en un point : par (27), (28) et (31).

2° *Hyperboloïde de raccordement du deuxième ordre.*

Il faut déterminer *en plus* a, b, c (n° **46**) ; on y arrive par la connaissance :

a) De l'élément β_3 en trois points distincts, par (28) ;

b) De l'élément β_3 en deux points et de γ_3 en un de ceux-ci : par (28) et (31) ;

c) Des éléments β_3, γ_3, δ_3 en un point par (28), (31) et (32).

CHAPITRE XI

Détermination des hyperboloïdes de raccordement le long de la génératrice de quelques surfaces réglées

51. En géométrie descriptive, les surfaces réglées σ sont souvent déterminées par la connaissance de quelques-unes des conditions suivantes :

a) Une ligne directrice L ;

b) Un plan directeur P ;

c) Une surface circonscrite S ;

d) Une surface normale N.

On rencontre la nécessité de construire des hyperboloïdes de raccordement le long d'une génératrice de ces surfaces; ce problème peut être résolu à l'aide des résultats du chapitre X; il suffit de montrer que l'on peut en revenir chaque fois à l'un des cas dont il est question au nº **50.**

HYPERBOLOÏDE DE RACCORDEMENT DU PREMIER ORDRE

52. Chacune des conditions du nº **51** permet de construire le plan tangent en un point de la génératrice.

En effet :

a) La génératrice G et la tangente à L déterminent le plan tangent au point d'appui de G sur L;

b) P est le plan asymptote de G;

c) S donne par définition le plan tangent à σ au point de contact A;

d) Au point de percée A de G dans N, le plan tangent à σ contient G et est perpendiculaire au plan tangent à N.

Si on peut ainsi construire le plan tangent en trois points distincts de G, le problème est résolu (cas *a*, nº **50**).

Mais deux des conditions de **51** peuvent fournir le plan tangent au même point.

On traitera les deux cas remarquables suivants :

1º Une ligne directrice L se trouve sur une surface circonscrite S;

2º Une ligne directrice L se trouve sur une surface normale N.

53. 1º G étant, suivant Ox, de l'identité des éléments α_1 et α_2 dans les deux surfaces S et σ, on conclut par *dérivation le long de* L,

$$\left.\begin{aligned} {}_\sigma\beta_1 + {}_\sigma\beta_2 \frac{dy}{dx} &= {}_s\beta_1 + {}_s\beta_2 \frac{dy}{dx} \\ {}_\sigma\beta_2 + {}_\sigma\beta_3 \frac{dy}{dx} &= {}_s\beta_2 + {}_s\beta_3 \frac{dy}{dx}. \end{aligned}\right\} \qquad (33)$$

Or, dans ces relations :

${}_\sigma\beta_1 = 0$ (génératrice suivant Ox) et $\frac{dy}{dx}$ est connu par l'angle fait en A par la tangente à L avec Ox.

La première équation (33) détermine donc ${}_\sigma\beta_2$; d'où la solution du problème par le cas *b*), nº **50**.

54. 2° Soit un système d'axes $Ox'y'z'$:

Ox' suivant la tangente à L en A ;

Oz' normal à σ ;

Oy' normal à N ;

On prendra dans σ les dérivées partielles de

z' par rapport à x' et y' ;

et dans N les dérivées partielles de

y' par rapport à x' et z'.

Les plans tangents à σ et N étant normaux le long de L, on obtiendra la relation

$$_\sigma\alpha'_1 \times {}_N\alpha'_1 = {}_\sigma\alpha'_2 + {}_N\alpha'_2. \qquad (34)$$

D'où, par dérivation le long de L :

$$\left.\begin{aligned} &_\sigma\alpha'_1\left({}_N\beta'_1 + {}_N\beta'_2\,\frac{dz'}{dx'}\right) + {}_N\alpha'_1\left({}_\sigma\beta'_1 + {}_\sigma\beta'_2\,\frac{dy'}{dx'}\right) \\ &= {}_\sigma\beta'_2 + {}_\sigma\beta'_3\,\frac{dy'}{dx'} + {}_N\beta'_2 + {}_N\beta'_3\,\frac{dz'}{dx'}, \end{aligned}\right\} \qquad (35)$$

ce qui donne au point A :

$$_\sigma\beta'_2 + {}_N\beta'_2 = 0.$$

$_\sigma\beta'_2$ est ainsi déterminé.

Mais on connaît $_\sigma\beta'_1$, car la courbe L se trouve sur σ (n° **39**).

On connaît aussi l'angle φ de la tangente à L avec G (axe Ox).

Comme $_\sigma\beta_1 = 0$, les relations (10) donneront :

$$\left.\begin{aligned} _\sigma\beta'_1 &= 2{}_\sigma\beta_2 \cos\varphi \sin\varphi + {}_\sigma\beta_3 \sin^2\varphi \\ _\sigma\beta'_2 &= {}_\sigma\beta_2 (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + {}_\sigma\beta_3 \cos\varphi \sin\varphi, \end{aligned}\right\} \qquad (36)$$

ce qui détermine $_\sigma\beta_2$, et donne la solution du problème par le cas *b*) du n° **50**.

HYPERBOLOÏDE DE RACCORDEMENT DU DEUXIÈME ORDRE

55. En chacun des points de G, β_1 et β_2 sont actuellement connus par l'hyperboloïde à raccordement du premier ordre (28).

Chacune des conditions du n° **51** permet de déterminer β_3 en un point de G :

En effet :

a) Suivant la tangente de L en A, on connaît l'élément $_\sigma\beta'_1$ (n° **39**) ; puis, à l'aide de (10), qui se réduit à

$$\beta'_1 = 2\beta_2 \cos\varphi \sin\varphi + \beta_3 \sin^2\varphi,$$

on détermine β_3.

b) L'hyperboloïde à raccordement du deuxième ordre devient le paraboloïde à plan directeur P.

En effet, les cônes parallèles à σ et à l'hyperboloïde, tracés par un même sommet, ont aussi un contact du deuxième ordre le long de la génératrice commune, car les conditions du n° **43** (relations [24]) sont à fortiori vérifiées pour les cônes ou b, d, b_1, d_1 sont nuls.

Mais le cône parallèle de l'hyperboloïde doit avoir alors un contact du 2ᵉ ordre avec un plan ; il doit donc se réduire lui-même à deux plans, dont l'un est confondu avec P.

C. Q. F. D.

c) Les équations (33) qui existent entre les éléments de σ et S ont ici les inconnues $\frac{dy}{dx}$ et ${}_\sigma\beta_3$; celles-ci y sont donc déterminées.

d) Les équations (36) sont écrites ici entre les inconnues ${}_\sigma\beta'_1$ et ${}_\sigma\beta_3$, qui sont ainsi déterminées.

Si ces éléments permettent de déterminer ${}_\sigma\beta_3$ en trois points de G, le problème est résolu par le cas *a*) du n° **50**.

56. Dans le cas envisagé en **53**, en mettant Ox' suivant la tangente à L, on obtient en dérivant deux fois le long de L, les relations obtenues par l'identité des éléments α'_1 et α'_2 dans σ et S :

$$ {}_\sigma\gamma'_1 + {}_\sigma\beta'_2 \frac{d^2y'}{dx'^2} = {}_s\gamma'_1 + {}_s\beta'_2 \frac{d^2y'}{dx'^2}, $$

$$ {}_\sigma\gamma'_2 + {}_\sigma\beta'_3 \frac{d^2y'}{dx'^2} = {}_s\gamma'_2 + {}_s\beta'_3 \frac{d^2y'}{dx'^2}. $$

$\frac{d^2y'}{dx'^2}$ est connu par les éléments de L (6).

Ces relations déterminent donc ${}_\sigma\gamma'_1$ et ${}_\sigma\gamma'_2$.

Les deux premières relations (11) déterminent alors γ_3 et γ_4, puisque γ_1 et γ_2 sont déterminés par (31).

Le problème est alors résolu par le cas *b*) du n° **50**.

57. Enfin, dans le cas envisagé au n° **54**, on obtient ici par dérivation de (35), pour le point A :

$$ 2{}_\sigma\beta'_1 \times {}_N\beta'_1 = {}_\sigma\gamma'_2 + {}_N\gamma'_2 + {}_\sigma\beta'_3 \frac{d^2y'}{dx'^2} + {}_N\beta'_3 \frac{d^2z'}{dx'^2}. $$

$\frac{d^2y'}{dx'^2}$ et $\frac{d^2z'}{dx'^2}$ sont déterminés par les éléments de L (6).

Cette équation détermine donc ${}_\sigma\gamma'_2$. D'ailleurs ${}_\sigma\gamma'_1$ est déterminé par les éléments de L également (n° **39**).

Comme au n° **56**, on détermine alors γ_3 et γ_4, et par suite on a la solution du problème par le cas *b*) du n° **50**.
